ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 6 Μαΐου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου

Α2. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

1η Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ

- $ΒΕ = ΓΔ$ (υπόθεση)
- $Ε\hat{Β}Γ = Δ\hat{Γ}Β$ (το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές)
- ΒΓ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $ΒΔ = ΓΕ$.

2η Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ

- ΑΔ=ΑΕ (Διαφορά ίσων τμημάτων: ΑΔ=ΑΓ-ΔΓ και ΑΕ=ΑΒ-ΕΒ)
- $Β\hat{Α}Δ = Ε\hat{Α}Γ$ (κοινή γωνία)
- ΑΒ=ΑΓ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα ΒΔ=ΓΕ.

Β2.

1η Λύση:

Έχουμε $ΑΕ = ΑΔ$ ως διαφορά ίσων τμημάτων, οπότε από υπόθεση ισχύει $ΑΕ = ΑΔ = ΕΗ = ΔΖ$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΕΗ$ και $ΑΔΖ$

- $ΕΗ = ΔΖ$
- $ΑΕ = ΑΔ$
- $Η\hat{Ε}Α = Ζ\hat{Δ}Α$ (ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $Β\hat{Ε}Γ$ και $Γ\hat{Δ}Β$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $ΑΗ = ΑΖ$

2η Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΗΑΓ και ΑΖΒ

- ΗΓ=ΖΒ (άθροισμα ίσων τμημάτων: ΗΓ=ΗΕ+ΕΓ και ΒΖ=ΔΖ+ΒΔ)
- $Α\hat{Γ}Η = Α\hat{Β}Ζ$ (από την σύγκριση στο Β1 με την 2η Λύση)
- ΑΓ=ΑΒ (το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα ΑΗ=ΑΖ.

Β3. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΘΓ$ και $ΖΙΒ$

- $Η\hat{Θ}Γ = Ζ\hat{Ι}Β = 90°$
- $ΗΓ = ΖΒ$ ($ΗΓ = ΗΕ + ΕΓ$ και $ΖΒ = ΖΔ + ΔΒ$)
- $Η\hat{Γ}Θ = Ζ\hat{Β}Ι$ (από την ισότητα των τριγώνων $ΒΕΓ$ και $ΓΔΒ$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $ΗΘ = ΖΙ$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το τρίγωνο $ΒΓΕ$ είναι ισόπλευρο άρα η γωνία $Ε\hat{Β}Γ = 60°$

Το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισόπλευρο άρα και η γωνία $Δ\hat{Α}Β = 60°$

Άρα ΑΔ//ΒΕ διότι οι εντός εκτός και επι ταυτά γωνίες που σχηματίζονται από αυτές και την ευθεία (ε) είναι ίσες.

Γ2. Έχουμε $ΑΔ//ΒΕ$ άρα $ΗΔ//ΒΕ$. Επίσης το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισόπλευρο άρα η $ΒΗ$ ως ύψος είναι και διάμεσος, οπότε

$ΗΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ = ΒΕ$ (επειδή το $ΒΕΓ$ τρίγωνο ισόπλευρο)

Συνεπώς το τετράπλευρο $ΗΔΕΒ$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει 2 πλευρές παράλληλες και ίσες) και επειδή $\hat{Η} = 90°$ είναι ορθογώνιο.

Γ3. Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$ έχουμε $ΗΒ//ΔΕ$ άρα $ΗΒ//ΔΖ$ και επειδή $Η$ το μέσο της $ΑΔ$ έχουμε ότι $Β$ το μέσο της $ΑΖ$

Γ4. Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$ έχουμε $Β$ το μέσο της $ΑΖ$ και $ΒΕ//ΑΔ$ ($ΗΔΕΒ$ παραλληλόγραμμο) άρα το $Ε$ είναι το μέσο της $ΔΖ$.

Το $ΗΕ$ ενώνει τα δύο μέσα των πλευρών $ΑΔ$ και $ΔΖ$ του τριγώνου $ΑΔΖ$ άρα $ΗΕ//ΑΖ$ άρα $ΗΕ//ΑΓ$ οπότε το $ΑΗΕΓ$ είναι τραπέζιο και επειδή

$ΑΗ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ = ΕΓ$ το $ΑΗΕΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές, συνεπώς $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Δ}Β$

Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο συνεπώς $ΑΒ//ΔΓ$ άρα

$Α\hat{Β}Δ = Β\hat{Δ}Γ$ ως εντός εναλλάξ.

Άρα ισχύει ότι $Α\hat{Δ}Β = Β\hat{Δ}Γ$, οπότε $Α\hat{Δ}Γ = 2Β\hat{Δ}Γ$ όμως από υπόθεση

$Α\hat{Δ}Γ = 2Β\hat{Γ}Δ$ άρα $2Β\hat{Γ}Δ = 2Β\hat{Δ}Γ \Leftrightarrow Β\hat{Γ}Δ = Β\hat{Δ}Γ$ άρα το τρίγωνο $ΔΒΓ$ είναι ισοσκελές συνεπώς $ΔΒ = ΒΓ$.

Δ2. Έχουμε $ΔΒ = ΒΕ$ άρα στο τρίγωνο $ΕΓΔ$ η $ΓΒ$ είναι διάμεσος και για αυτήν ισχύει: $ΓΒ = ΔΒ = \frac{ΔΕ}{2}$. Άρα το τρίγωνο $ΕΓΔ$ είναι ορθογώνιο διότι η διάμεσος ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί συνεπώς

$Ε\hat{Γ}Δ = 90°$ άρα $ΕΓ \perp ΔΓ$

Δ3. Η γωνία $E\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ οπότε έχουμε

$$E\hat{B}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 2B\hat{\Delta}\Gamma = 2A\hat{B}\Delta$$

Δ4. Το τετράπλευρο $AB\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο διότι $AZ//B\Gamma$ και $AB//Z\Gamma$ άρα $AZ = B\Gamma$. Από Δ1 το $B\Delta = B\Gamma$ άρα $AZ=B\Gamma=B\Delta$ (1).
Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι τραπέζιο διότι $AB//\Delta Z$ και έχει ίσες διαγώνιες $AZ = B\Delta$ (σχέση (1)) συνεπώς είναι ισοσκελές τραπέζιο άρα $A\Delta = BZ$ όμως από υπόθεση έχουμε $A\Delta = AB$ άρα $AB = BZ$